第19講　数学的帰納法

19　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 a_1，a_2，……，a_{n+1} において，$2 \leqq j \leqq n$ を満たすすべての自然数 j に対して

不等式　(A)　$$a_j \geqq \frac{a_{j-1}+a_{j+1}}{2}$$

が成り立つとき，$2 \leqq k \leqq n$ を満たすすべての自然数 k に対して

不等式　(B)　$$a_k \geqq \frac{a_1+(k-1)a_{k+1}}{k}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(2)　$0<x<y$ のとき，次の問いに答えよ．

(イ)　$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ を証明せよ．

(ロ)　$x_1=\sqrt{xy}$，$y_1=\dfrac{x+y}{2}$，$x_2=\sqrt{x_1y_1}$，$y_2=\dfrac{x_1+y_1}{2}$，……

，$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$，$y_n=\dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$

と順次定めるとき

$$0<y_n-x_n<\frac{y-x}{2^n}$$

であることを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　数学的帰納法

19　n 個の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ について $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　数学的帰納法

19　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 a_1，a_2，……，a_{n+1} において，$2 \leqq j \leqq n$ を満たすすべての自然数 j に対して

不等式 (A)　$$a_j \geqq \frac{a_{j-1}+a_{j+1}}{2}$$

が成り立つとき，$2 \leqq k \leqq n$ を満たすすべての自然数 k に対して

不等式 (B)　$$a_k \geqq \frac{a_1+(k-1)a_{k+1}}{k}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(2)　$0<x<y$ のとき，次の問いに答えよ．

(イ)　$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ を証明せよ．

(ロ)　$x_1=\sqrt{xy}$，$y_1=\dfrac{x+y}{2}$，$x_2=\sqrt{x_1y_1}$，$y_2=\dfrac{x_1+y_1}{2}$，……

，$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$，$y_n=\dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$

と順次定めるとき

$$0<y_n-x_n<\frac{y-x}{2^n}$$

であることを証明せよ．

【答】　略

【解答】

(1)　$k=2$ とすると

$$a_2-\frac{a_1+(2-1)\cdot a_3}{2}=a_2-\frac{a_1+a_3}{2} \geqq 0 \qquad ((\text{A})より)$$

であるから(B)は成り立つ．ここで $k=l$ $(2 \leqq l \leqq n-1)$ のとき

$a_l \geqq \dfrac{a_1+(l-1)a_{l+1}}{l}$　……①　が成り立つと仮定すると

$$a_{l+1}-\frac{a_1+la_{l+2}}{l+1} \geqq a_{l+1}-\frac{a_1+l(2a_{l+1}-a_l)}{l+1} \qquad ((\text{A})より)$$

$$=\frac{l}{l+1}\left\{a_l-\frac{a_1+(l-1)a_{l+1}}{l}\right\} \geqq 0 \qquad (①より)$$

よって $a_{l+1} \geqq \dfrac{a_1+la_{l+2}}{l+1}$ となり $k=l+1$ のときにも(B)が成り立つ．

よって数学的帰納法により(B)は示された．

(2)　(イ)　$0<x<y$ より $\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\dfrac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2}{2}>0$

また，$\dfrac{y-x}{2}-\left(\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)=\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})>0$ より

$0<\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}<\dfrac{y-x}{2}$ が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ロ)　$n=1$ のとき，(イ)により　$0<y_n-x_n<\dfrac{y-x}{2^n}$　……②　は成り立つ．

ここで $n=k(\geqq 1)$ のとき $0<y_k-x_k<\dfrac{y-x}{2^k}$ が成り立つと仮定すると

$$y_{k+1}-x_{k+1}=\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}$$

となるが，

x_n と y_n の定め方により帰納的に $x_k>0$，$y_k>0$ となることと，仮定より $x_k<y_k$ であることから，(イ)と同様に

$$\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}>0$$

これより

$$0<x_{k+1}<y_{k+1}$$

となる．よって(イ)より

$$0<\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}<\frac{y_k-x_k}{2}$$

となるが，仮定より

$$0<\frac{x_k+y_k}{2}-\sqrt{x_ky_k}<\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

よって

$$\frac{y_k-x_k}{2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{y-x}{2^k}=\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

が成り立つので

$$0<y_{k+1}-x_{k+1}<\frac{y-x}{2^{k+1}}$$

ゆえに $n=k+1$ のときにも②は成り立つ．

　よって数学的帰納法により②は示された．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　数学的帰納法

19 n 個の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ について $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

【答】 略

【解答】

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=x_1{}^2,\qquad (\text{右辺})=1\cdot x_1{}^2$$

より成り立つ．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \leqq k\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
(k+1)\sum_{i=1}^{k+1} x_i{}^2-\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^2 &= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+x_{k+1}{}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} x_i+x_{k+1}\right)^2\\
&= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+x_{k+1}{}^2\right)-\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2+2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i+x_{k+1}{}^2\right\}\\
&= (k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+(k+1)x_{k+1}{}^2-\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i-x_{k+1}{}^2\\
&\geqq (k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+(k+1)x_{k+1}{}^2-k\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i-x_{k+1}{}^2\\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i{}^2+kx_{k+1}{}^2-2x_{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i\\
&= \sum_{i=1}^{k}(x_i{}^2+x_{k+1}{}^2-2x_{k+1}x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(x_i-x_{k+1})^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つ．

よって帰納的に与式は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。